第27卷 第6期
2010年12月

工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 27 No. 6
Dec. 2010

文章编号:1005-3085(2010)06-1137-04

单台机器排序问题关于加工时间的反问题*

张 峰[1], 陈德伍[2], 唐国春[1]

(1- 上海第二工业大学，上海 201209; 2- 上海商学院陆家浜路院区，上海 200011)

摘 要: 本文研究单台机器总完工时间排序问题关于加工时间的反问题，研究尽量“小”地调整工件的加工时间使给定工件的加工次序成为最优的排序。我们考虑尽量“小”地调整是分别使最大带权相对离差的绝对值为最小、使总的带权相对离差的绝对值为最小或者使总的带权相对离差的平方为最小等三种情况。通过把问题转化成数学规划，我们分别指出这三种情况下的三个反问题都可以在多项式时间内求解。

关键词: 排序；反问题；加工时间；相对离差

分类号: **AMS**(2000) 90B15　　**中图分类号**: O223　　**文献标识码**: A

1 问题的提出

最近十余年来，组合优化问题的反问题成为国内外学者讨论得较多的一个热点。例如，最短路问题的反问题、最小割问题的反问题、指派问题的反问题、最小生成树问题的反问题等。文献 [1] 对这类反问题以及求解方法做了较为全面、深入的综述。

最优化问题通常是在参数 (费用、容量等) 已知的情况下寻找最优解。然而，在实际情况中我们仅仅只能知道有关参数的估计值。所谓反问题是对于最优化问题的一个可行解，怎样对费用、容量等参数做最“小”的调整 (如某种意义下最小的代价) 使该可行解成为这个最优化问题的最优解。

陈荣军等[2] 对于排序问题的反问题进行研究。对于单台机器带权总完工时间排序问题 $1\|\Sigma w_jC_j$，陈荣军等[2] 研究尽量“小”地调整工件的权 w_j 使给定工件的加工次序成为最优序；并对于不带权总完工时间单台机器排序问题 $1\|\Sigma C_j$，陈荣军等[2] 研究尽量“小”地调整工件的加工时间使给定工件的加工次序成为最优序。陈荣军等[2] 把这些问题转化为线性规划和凸二次规划，并提出相应的多项式时间算法。

本文继续陈荣军等[2] 关于加工时间反问题的研究，即对于单台机器排序问题 $1\|\Sigma C_j$，研究尽量“小”地调整工件的加工时间使给定工件的加工次序成为最优序。然而，我们提出的反问题模型不同于陈荣军等[2] 研究的模型。我们考虑工件加工时间的变化是用工件加工时间的相对变化量来刻画的，而陈荣军等[2] 考虑工件加工时间的变化是用工件加工时间的绝对变化量来刻画的。

本文第 2 节提出单台机器排序问题 $1\|\Sigma C_j$ 关于加工时间的三个反问题，第 3 节把这三个反问题转化成线形规划，从而可以在多项式时间内求解，最后的第 4 节是结束语。

收稿日期: 2005-07-22. **作者简介**: 张峰 (1961年5月生)，男，博士，教授. 研究方向：运筹学.
***基金项目**: 国家自然科学基金 (10371071; 70731160015)；上海市教委项目 (07zz178).

2 关于加工时间的三个反问题

设有n个工件$J_1, J_2, \cdots, J_n$，需要在一台机器上加工，每一时刻最多只能有一个工件在机器上加工，而且工件一旦被加工就不允许中断。工件$J_j\,(j = 1, 2, \cdots, n)$的加工时间和完工时间分别记为$p_j$和$C_j$。经典的单台机器总完工时间排序问题，是寻找给定的$n$个工件的一个加工顺序，使目标函数$F = \Sigma C_j$为最小。

对于给定的工件的加工次序$\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n))$，不妨假设工件是按此加工次序编号的，所以有$\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n)) = (1, 2, \cdots, n)$。在实际生产过程中，每个工件的加工时间有时只是根据以往经验所得到的一个估计数，并且随着机器本身状况的改变、操作工人的更换或自身技术水平的变化以及各种外部因素的影响，工件的加工时间可能发生一定程度的变化。设工件J_i的加工时间p_i的变化可以表示为$p_i(1 + x_i)$，其中$x_i \geq -1$称为工件J_i加工时间的相对离差。工件加工时间的相对离差刻画的是工件加工时间变化的百分比，例如$x_i = -0.1$和$x_i = 0.2$分别表示工件加工时间分别比原来的加工时间变小10%和变大20%。由于工件的加工时间可能相差很大，因此考虑工件的相对离差比单纯考虑每个工件的绝对变化似乎更为合理。下面我们给出单机器排序问题$1\|\Sigma C_j$关于加工时间反问题。

$$\begin{aligned} &\min && \|x\| \\ &\text{s.t.} && p_{i+1}x_{i+1} - p_i x_i \geq p_i - p_{i+1}, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \\ &&& x_i \geq -1, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \end{aligned}$$

其中$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，约束$p_{i+1}x_{i+1} - p_i x_i \geq p_i - p_{i+1}$，$i = 1, 2, \cdots, n$，是为了保证工件加工时间变化后使排序$\sigma = (1, 2, \cdots, n)$成为SPT (Shortest Processing Time，即按工件加工时间的非降)序，因为SPT序是排序$1\|\Sigma C_j$问题的最优序[3]。我们根据$\|x\|$的不同定义提出三个反问题。

模型1 使最大带权相对离差的绝对值为最小的反问题

$$\begin{aligned} &\min \max_i && w_i|x_i| \\ &\text{s.t.} && p_{i+1}x_{i+1} - p_i x_i \geq p_i - p_{i+1}, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \\ &&& x_i \geq -1, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \end{aligned} \tag{1}$$

其中权$w_i \geq 0$是决策者对工件的加工时间允许被调整程度的一种人为的要求，越大说明决策者越不希望该工件的加工时间被调整，$w_i = 0$则表示决策者认为该工件的加工时间可任意调整。

模型2 使总的带权相对离差的绝对值为最小的反问题

$$\begin{aligned} &\min && \sum_{i=1}^{n} w_i|x_i| \\ &\text{s.t.} && p_{i+1}x_{i+1} - p_i x_i \geq p_i - p_{i+1}, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \\ &&& x_i \geq -1, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \end{aligned} \tag{2}$$

这里权$w_i \geq 0$的含义与模型1相同。

模型3 使总的带权相对离差平方为最小的反问题

$$\begin{aligned} &\min && \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^2 \\ &\text{s.t.} && p_{i+1}x_{i+1} - p_i x_i \geq p_i - p_{i+1}, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \\ &&& x_i \geq -1, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \end{aligned} \tag{3}$$

这里权 $w_i \geq 0$ 的含义与模型1相同。

3　反问题的解

模型1　为了把目标函数中的绝对值 $|x_i|\,(i=1,2,\cdots,n)$ 处理成不含有绝对值的形式，我们引入变量 α_i 与 β_i，定义如下

$$\alpha_i = \frac{|x_i| + x_i}{2}, \quad i = 1,2,\cdots,n, \tag{4}$$

$$\beta_i = \frac{|x_i| - x_i}{2}, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{5}$$

显然成立以下两式

$$|x_i| = \alpha_i + \beta_i, \quad i = 1,2,\cdots,n, \tag{6}$$

$$x_i = \alpha_i - \beta_i, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{7}$$

为了使目标函数中的取最大值运算不出现，我们引入新变量 θ，这样模型1的式(1)等价于下面的数学规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta \\ \text{s.t.} \quad & \alpha_i + \beta_i \leq \theta, \quad i = 1,2,\cdots,n, \\ & p_{i+1}(\alpha_{i+1} - \beta_{i+1}) - p_i(\alpha_i - \beta_i) \geq p_i - p_{i+1}, \quad i = 1,2,\cdots,n, \\ & \alpha_i - \beta_i \geq -1, \quad i = 1,2,\cdots,n. \end{aligned} \tag{8}$$

从而，我们把数学规划(1)等价转换成一个线性规划(8)。这个线性规划可以在多项式时间内求解。求出 α_i 和 β_i 后，再根据式子 $x_i = \alpha_i - \beta_i$，求出 $x_i\,(i = 1,2,\cdots,n)$，从而得到模型1的解。

模型2　同样我们把表达式(6)和(7)代入式(2)，并整理得到等价于模型2的下列数学规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{n} w_i(\alpha_i + \beta_i) \\ \text{s.t.} \quad & p_{i+1}(\alpha_{i+1} - \beta_{i+1}) - p_i(\alpha_i - \beta_i) \geq p_i - p_{i+1}, \quad i = 1,2,\cdots,n, \\ & \alpha_i - \beta_i \geq -1, \quad i = 1,2,\cdots,n. \end{aligned} \tag{9}$$

规划(9)也是一个的线性规划问题，因此可以在多项式时间内求解。求出 α_i 和 β_i 后，再根据式子 $x_i = \alpha_i - \beta_i$，求出 $x_i\,(i = 1,2,\cdots,n)$，从而得到模型2的解。

模型3　由于模型3的约束条件均为线性的，目标函数为严格凸二次函数，所以可以利用文献[4]介绍的方法在多项式时间内求解。

4　结束语

本文以数学规划作为工具，研究单台机器总完工时间排序问题关于加工时间的反问题。所研究的反问题的优化目标分别是最大带权相对离差的绝对值、总的带权相对离差的绝对值或者

是总的相对离差平方等三种情况。我们通过把问题转化成线形规划问题，分别得到求解这三种反问题的多项式时间算法。单台机器其它排序问题的反问题，如误工工件个数最少排序问题(简称为误工问题)的反问题等，有待于进一步研究。

参考文献：

[1] Heuberger C. Inverse combinatorial optimization: a survey on problems, methods and results[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2004, 8: 329-361

[2] 陈荣军，陈峰，唐国春. 单台机器总完工时间排序问题的反问题[J]. 上海第二工业大学学报，2005, 22: 1-7
Chen R J, Chen F, Tang G C. Inverse problems of a single machine scheduling to minimize the total completion time[J]. Journal of Shanghai Second Polytechnic University, 2005, 22: 1-7

[3] 唐国春，张峰，罗守成等. 现代排序论[M]. 上海：上海科学普及出版社，2003
Tang G C, Zhang F, Luo S C, *et al.* Theory of Modern Scheduling[M]. Shanghai: Shanghai Popular Science Press, 2003

[4] Goldfar D, Idnani A. A numerically stable dual method for solving strictly convex quadratic program[J]. Mathematical Programming, 1983, 27: 1-33

Inverse Problems of Single Machine Scheduling on Processing Times of Jobs

ZHANG Feng[1], CHEN De-wu[2], TANG Guo-chun[1]

(1- Shanghai Second Polytechnic University, Shanghai 201209;
2- Lujiabanglu Campus, Shanghai Business College, Shanghai 200011)

Abstract: In this paper, we discuss three inverse problems of the single machine scheduling to minimize the total completion time. The objectives we are considering are the maximum of weighted absolute deviation of processing times, the weighted sum of absolute value of relevant deviation of processing times and the weighted sum of the square of relevant deviation of processing times. We transfer the problems into mathematical programming problems and hence show that they can be solved in polynomial time.

Keywords: single machine scheduling; inverse problem; total completion time; relevant deviation

Received: 22 July 2005. **Accepted:** 28 Aug 2006.
Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10371071; 70731160015); the Research Fund of Shanghai Municipal Education Commission (07zz178).